Om antal anpassningsbara parametrar i Murry Salbys ekvation

Murry Salbys ekvation beskriver att koldioxidhalten ändringshastighet är proportionell mot en drivande kraft som är en temperaturdifferens. Det finns tänkbara fysikaliska förklaringar varför en sådan ändringshastighet har en temperaturdifferens som drivande kraft men jag går inte in på detta här. Ekvationen är

$$\frac{dy}{dt}=k\left(T-T_b\right) \qquad (1)$$

där

y = koldioxidhalten i atmosfären, ppmv
t = tiden
k = en hastighetskonstant
T = den globala medeltemperaturen
T_b = en global medeltemperatur vid ett referenstillstånd

Denna ekvation har två obestämda parametrar, k och T_b, som skulle kunna bestämmas genom att anpassa data för koldioxidhaltens ändringshastighet till data för temperaturavvikelser. För att göra anpassningen måste man naturligtvis först beräkna koldioxidhaltens ändringshastighet från observerade data för koldioxidhalten.

Men om man integrerar ekvationen så kan man också, som jag har gjort, anpassa data för koldioxidhalten till integrerade data för temperaturavvikelsen eftersom vi får följande ekvation:

$$y-y_0=k\int_{t_0}^{t}\left(T-T_b\right)dt \qquad (2)$$

Man integrerar här observerade data för temperaturavvikelserna från en tidpunkt t_0 till en tidpunkt t. Koldioxidhalten y_0 måste vara den vid tidpunkten t_0 och är alltså en observerad storhet. Den är inte en anpassningsbar parameter eftersom den ingår i observationerna.

Man kan skriva om ekvation (2) på följande sätt för att som jag har gjort kunna lösa parameteranpassningen med linjär regression med minsta kvadratmetoden:

$$y-y_0=k\int_{t_0}^{t}T\,dt-k\,T_b\left(t-t_0\right) \qquad (3)$$

Ekvation (3) är linjär i de anpassningsbara parametrarna k och T_b. Den motsvarar, med beteckningar enligt Wikipedias artikel om Multipel linjär regression, följande linjära ekvation:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 \qquad (4)$$

I detta fall blir då

$$Y = y - y_0 ; \; \beta_0 = 0$$

$$X_1 = \int_{t_0}^{t} T\,dt ; \; \beta_1 = k$$

$$X_2 = t - t_0 ; \; \beta_2 = -k T_b$$

Vi kan alltså med våra data beräkna Y , X_1 och X_2 för vart och ett av åren 1851-2012 och sedan bestämma β_1 och β_2 och därmed k och T_b genom multipel linjär regression. Variablerna Y , X_1 och X_2 skall här helt bestå av observerade data. Koldioxidhalten y_0 skall vara den observerade koldioxidhalten för t_0 = 1850 annars bryter man mot ekvationens innebörd. Om man ändrar t_0 måste man också ändra y_0 och vice versa.

Vid linjär regression har man oftast en konstant term β_0 med i modellekvationen, men inte i vårt fall. Program för linjär regression, som REGR i Open Office Calc, som jag har använt, är gjorda så att man kan välja om den linjära modellekvationen skall innehålla en konstant term eller inte. I vårt fall skall vi välja linjär modell utan konstant term dvs. β_0 = 0. Detta är inte någon parameteranpassning utan endast en instruktion till datorprogrammet vilken linjär modell som skall användas vid anpassningen.

Minstavadratmetoden innebär att vi för varje observation i av Y , X_1 och X_2 uttrycker hur stor avvikelsen blir mellan vänstra och högra ledet i modellekvationen:

$$\epsilon_i(\beta_{1,}\beta_2) = Y_i - \beta_1 X_{1i} - \beta_2 X_{2i} = (y - y_0)_i - k\left[\int_{t_0}^{t} T\,dt\right]_i - (-k T_b)(t - t_0)_i \qquad (5)$$

Denna avvikelse blir uppenbarligen en funktion av de i vårt fall två anpassningsbara parametrarna. Avvikelserna för varje observation kvadreras och summeras så att man får en kvadratsumma:

$$S(\beta_{1,}\beta_2) = S(k, k T_b) = \sum_{1}^{N} \epsilon_i^2 \qquad (6)$$

Värdena på de två anpassningsbara parametrarna bestäms därefter så att denna kvadratsumma blir så liten som möjligt.

Hur anpassningen med Murry Salbys ekvation beräknades

Jag använde datorprogrammet REGR i Open Office Calc och beräkningen visas i bilden på sista sidan. Figuren visar inte alla de mer än 150 raderna med observerade data utan bara den översta delen av praktiska skäl.

I kolumn D finns observerade värden $t-t_0$, i kolumn E finns observerade värden på integralen $\int_{t_0}^{t} T\,dt$ och i kolumn F finns observerade värden på $y-y_0$ (ursäkta tryckfelet i bilden). Lägg märke till att de observerade värdena på grund av sina definitioner måste börja med noll.

Utdata från datorprogrammet REGR finns i cellrektangeln H2-I6 samt i cellen J2. I rad 2 finns de anpassade parametervärdena k och $-k\,T_b$. I cell J2 får vi värdet noll som kvitto på att vi valt linjär modell utan konstant term, i annat fall hade vi där fått det anpassade värdet på motsvarande parameter.

I rad 3 får vi standardfelen i de två anpassade parametervärdena. Om vi hade valt linjär modell med konstant term hade vi i J3 fått värdet på den anpassade parameterns standarddeviation, men nu saknas detta.

I cell H4 får vi determinationskoefficienten R^2 . I cell I5 får vi antal frihetsgrader som är antal observationspunkter, vilket för 1850-2012 är 163 minus antal anpassade parametrar som är två, vilket ger 161 frihetsgrader.

Det är alltså helt klart att jag har anpassat två parametrar med hjälp av minstakvadratmetoden på en linjär modellekvation.

Resulterande diagram med rubriken *Jämförelse mellan beräknade värden enligt Murry Salbys teori och observationer* finns i blogginlägget Om Murry Salby: Frågor och svar.

Anpassning till en jämförbar exponentiell ekvation

I diskussionen av min beräkning med Murry Salbys ekvation har man framfört tesen att anpassningen ger bra resultat därför att de med Murry Salbys ekvation anpassade koldioxidhalterna måste beskriva en exponentiell ekvation. Men kan verkligen Murry Salbys ekvation beskriva en jämförbar exponentiell kurva med två anpassningsbara parametrar?

Man kan redan från början se några principiella svårigheter. Observerade data börjar i origo och en exponentiell funktion med två parametrar kan, som framgår av ekvationerna nedan, inte gå genom origo. Dessutom ändras koldioxidhalten med konstant hastighet av omkring 2 ppm/år sedan slutet av förra millenniet och detta strider mot exponentiella funktioners egenskaper.

En exponentiell funktion med två anpassningsbara parametrar har följande ekvation:

$Y=\beta'_0 e^{\beta_1 X}$ vilken kan skrivas i logaritmerad form så att den blir linjär i parametrarna och kan användas som linjär regressionsmodell:

$$\ln(Y)=\beta_0+\beta_1 X \qquad (7)$$

I vårt fall blir ekvation (7):

$$\ln(y-y_0)=\beta_0+\beta_1(t-t_0) \qquad (8)$$

När man lägger in en exponentiell trendlinje i ett diagram i ett kalkylblad såsom Open Office Calc eller Microsoft Excel så är det precis en sådan ekvation som anpassas med minstakvadratmetoden och två parametrar. Resultatet har jag visat i blogginlägget Om Murry Salby: Frågor och svar. Se det sista diagrammet, *Observerade koldioxidhalter med exponentiell trendlinje*, som finns i uppdateringen på slutet. Som synes blir anpassningen inte bra.

Slutsatser

Jag har anpassat Murry Salbys ekvation till observationerna med två anpassningsbara parametrar. Den beräknade kurvan visar inte bara en noggrann anpassning och en övergripande riktig form utan den ger också en konstant koldioxidökning sedan slutet av förra millenniet som nära ansluter sig till observerade data.

Anpassning av en jämförbar exponentiell funktion med två anpassningsbara parametrar till samma observerade data ger mycket sämre resultat. Den anpassade kurvan kan givetvis inte gå genom origo eller visa den konstanta koldioxidökningen sedan slutet av förra millenniet. Men även i övrigt avviker den markant från observerade data.

Om man inför en ytterligare parameter i den exponentiella funktionen får man givetvis en bättre anpassning eftersom fler parametrar ger denna effekt av rent matematiska skäl. Men det går fortfarande inte att få kurvan att visa den konstanta koldioxidökningen sedan slutet av förra millenniet. En exponentiell funktion måste nämligen alltid kröka sig.

Vi kan alltså se att påståendet, att Murry Salbys ekvation beskriver observerade data så bra beroende på att koldioxidkurvan liknar en exponentiell funktion, är felaktigt.

D	E	F	G	H	I	J
t-t0	Integral	Y-y0				
0	-0	0		2.20774631	0.91679377	0
1	-0.2841693	0.2		0.05674678	0.01320469	#Saknas
2	-0.5006666	0.3		0.99018724	4.14930251	#Saknas
3	-0.7535077	0.4		8123.10668	161	#Saknas
4	-1.0158957	0.6		279706.365	2771.89052	#Saknas
5	-1.2675028	0.7		#Saknas	#Saknas	#Saknas
6	-1.5784347	0.9		#Saknas	#Saknas	#Saknas
7	-1.9896	1		#Saknas	#Saknas	#Saknas
8	-2.4700088	1.2		#Saknas	#Saknas	#Saknas
9	-2.8434576	1.4				
10	-3.1492551	1.5				
11	-3.5151164	1.7		k		2.20774631
12	-3.9926242	1.8		-k*Tb		0.91679377
13	-4.3822298	1.9		Tb		-0.41526228
14	-4.7608016	2.1				
15	-5.1601544	2.2				
16	-5.3911688	2.3				
17	-5.6732517	2.4				
18	-5.943649	2.5				
19	-6.1807286	2.7				
20	-6.4440244	2.8				